LEZIONI ED ESERCITAZIONI DI MATEMATICA

Prof. Francesco Marchi[1]

Esercitazione su: *Studio qualitativo di funzione (senza derivate) e grafici di funzione*

3 novembre 2010

[1]Per altri materiali didattici o per contattarmi:

Blog personale: http://francescomarchi.wordpress.com/
Indirizzo email: fra.marchi@yahoo.it

1 Esercizi di teoria

1.1 Definizioni

Si dia la definizione di:

- Asintoto verticale; asintoto orizzontale; asintoto obliquo

1.2 Vero o falso

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- Se il dominio di una funzione è limitato, il suo grafico non può avere asintoti orizzontali
- Se il dominio di una funzione è limitato, il suo grafico non può avere asintoti verticali
- Se esiste finito il $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, allora $f(x)$ ha un asintoto obliquo

1.3 Quesiti vari

Si risponda ai seguenti quesiti:

- Quanti asintoti orizzontali può avere una funzione? E quanti asintoti verticali?

2 Esercizi

2.1 Esercizi vari

2.1.1 Asintoti verticali

Quali tra le funzioni elencate qui di seguito ha almeno un asintoto verticale?

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1} \tag{1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \tag{2}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-1} \tag{3}$$

$$f(x) = \ln(1+x^2) \tag{4}$$

$$f(x) = \ln x \tag{5}$$

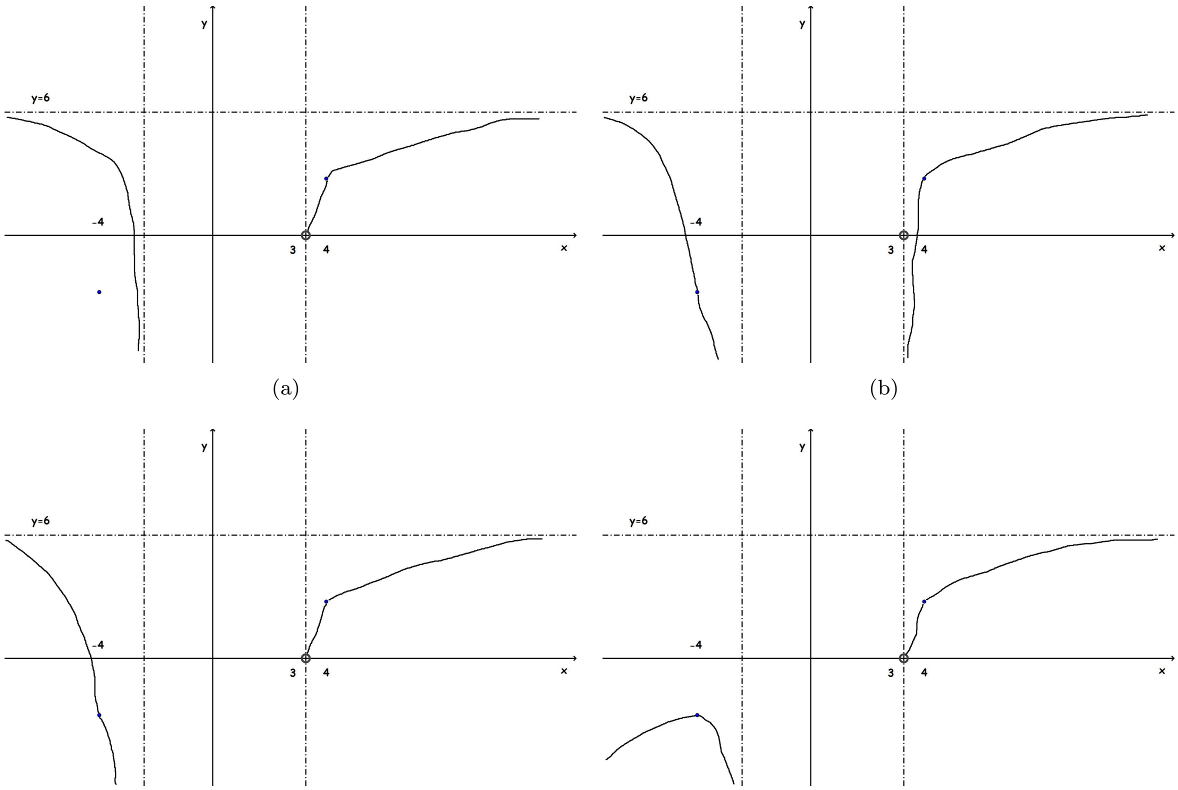
2.2 Esercizi sui grafici

2.2.1 Date alcune condizioni, individuare il grafico

Di una certa funzione $f(x)$ si sa che:

- $f(-4) = -f(4)$
- la retta di equazione $y = 6$ è un asintoto orizzontale
- la funzione ha nel punto $x = 3$ una discontinuità eliminabile

Determinare quale fra i grafici proposti in Figura 1 rappresenta la funzione $f(x)$.



(a) (b) (c) (d)

Figura 1

2.2.2 Data l'espressione analitica, individuare/scegliere il grafico

Mediante opportune considerazioni sugli asintoti, associare a ciascuna delle funzioni seguenti il grafico corrispondente fra quelli proposti in Figura 2:

$$f_1(x) = \frac{1}{4-x^2}; \qquad f_2(x) = \frac{x^2}{4-x^2}; \qquad f_3(x) = \frac{x}{2-x}; \qquad f_4(x) = \frac{x}{4-x^2};$$

2.2.3 Dato il grafico, individuare/scegliere l'espressione analitica

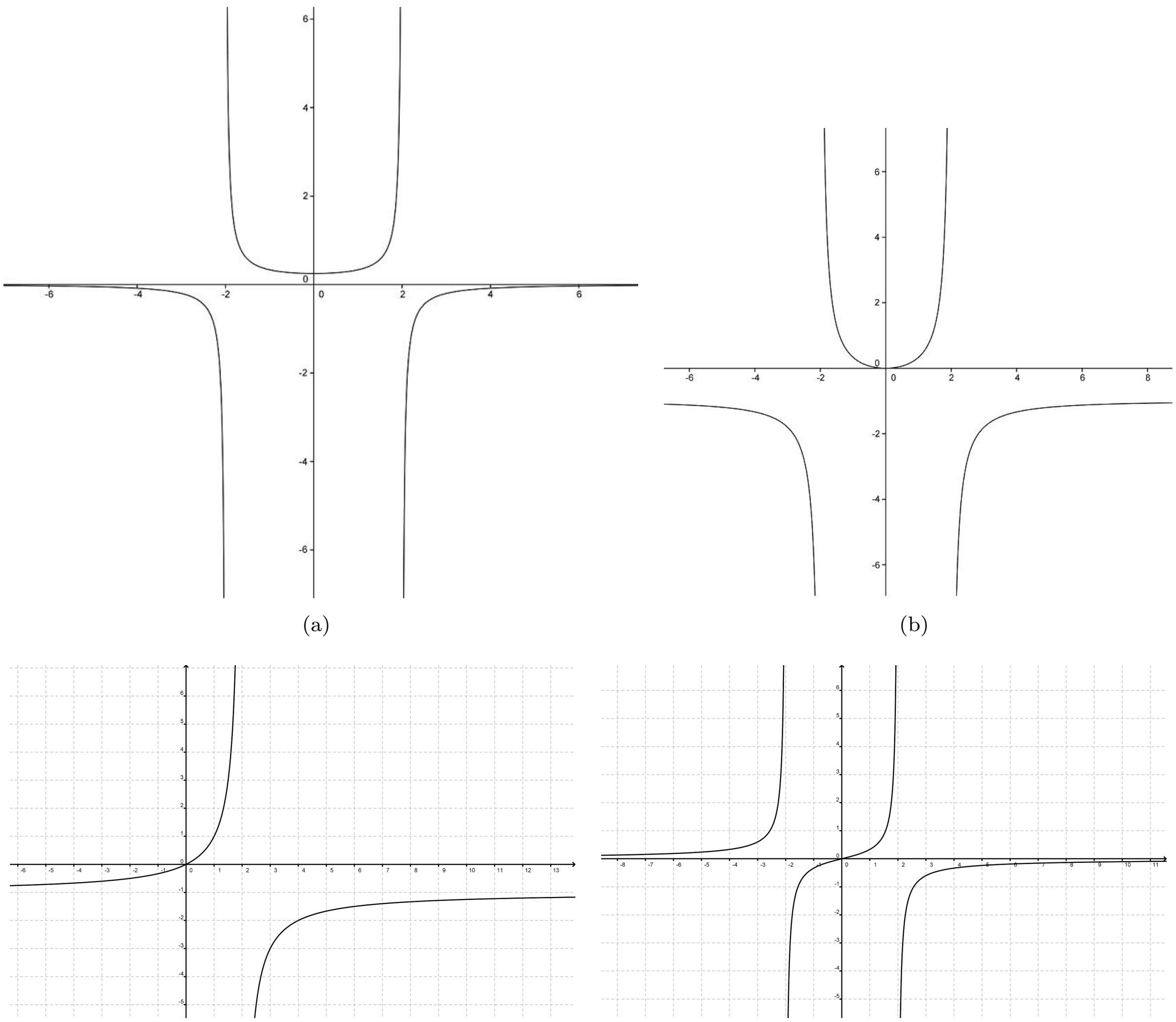
Determinare a quale delle funzioni elencate di seguito corrisponde il grafico rappresentato in Figura 3.

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4} \tag{6}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right) \tag{7}$$

$$f(x) = e^{\frac{x^2-1}{x^2-4}} \tag{8}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-4}} \tag{9}$$



(a) (b)

(c) (d)

Figura 2

2.2.4 Dato il grafico, trarre conclusioni su asintoti, segno etc.

Esercizio 1 Dato il grafico in figura 4, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1. La funzione è positiva per $x > 0$
2. La funzione ha due asintoti
3. La funzione vale zero per $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_5$
4. La funzione non ha asintoti orizzontali
5. $f(0) = x_1$
6. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = x_5$
7. $\lim_{x \to x_5} f(x) = +\infty$

Figura 3

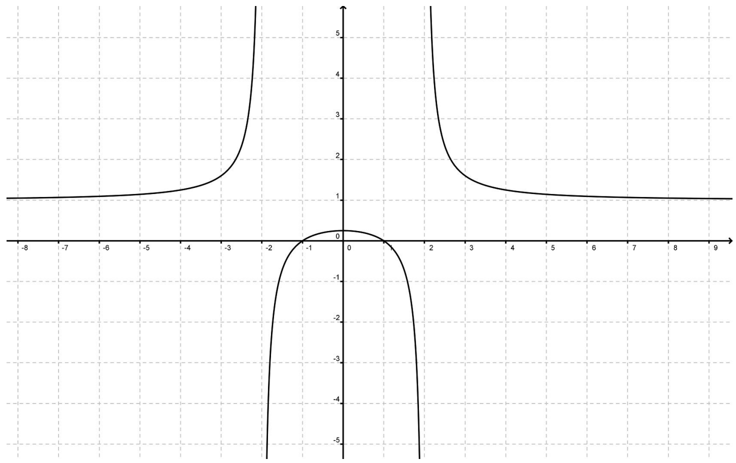
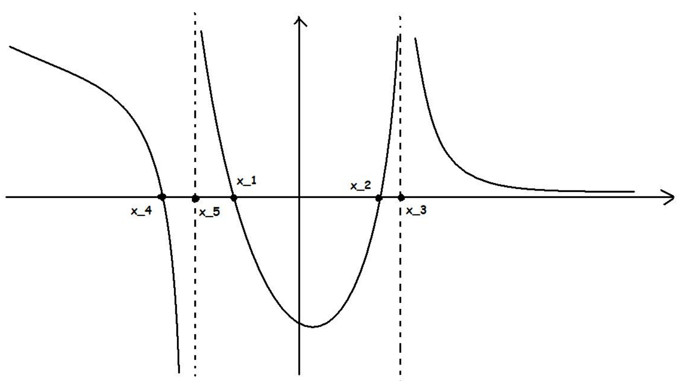


Figura 4



2.2.5 Date alcune condizioni, inventare un grafico plausibile

Esercizio 1 Disegnare una funzione che:

1. Sia positiva per $x < -2$ e negativa per $x > -2$
2. Abbia la retta di equazione $x = -2$ come asintoto verticale
3. Abbia un asintoto orizzontale

Esercizio 2 Disegnare una funzione che:

1. Abbia per dominio $\mathbb{R} \setminus \{-7; 6\}$
2. Sia positiva per $x < -3$ e per $5 < x < 7$
3. Abbia la retta di equazione $y = 3$ come asintoto orizzontale sinistro

2.3 Studiare qualitativo di funzione

Studiare le funzioni proposte nelle sezioni 2.3.1 e 2.3.2.
In particolare:

- Determinare il dominio della funzione.
- Stabilire le eventuali simmetrie della funzione (funzioni pari o dispari).
- Determinare le intersezioni della funzione con gli assi.
- Studiare il segno della funzione.
- Trovare le equazioni degli eventuali asintoti: verticali, orizzontali, obliqui.
- Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

2.3.1 Funzioni algebriche razionali fratte

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{3 + x}; \qquad g(x) = \frac{x + 2}{9 - x^2} \tag{10}$$

$$r(x) = \frac{3x^3 + 2x}{x^3 + 7}; \qquad j(x) = \frac{4x - x^3}{2x^2 + 6x - 5} \tag{11}$$

2.3.2 Funzioni di vario tipo

$$h(x) = \frac{3x}{e^{2x} - 1}; \qquad m(x) = \arctan \frac{x}{x + 1} \tag{12}$$

$$p(x) = \log(x^2 + 3x - 1); \qquad d(x) = \frac{4^x - \ln x + 3}{x^2 - 6x} \tag{13}$$